第26卷 第5期　　　工 程 数 学 学 报　　　Vol. 26 No. 5
2009年10月　　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　　Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0895-11

微分方程和差分方程的多解存在性

吴树宏

(武汉理工大学理学院数学系，武汉　430070)

摘　要: 本文首先讨论了差映射的一个映射性质：某元有无映射原象等价于映射象集是否包含此元，等价于以此元为象的映射方程的解是否存在。若有两个映射，其中一个映射的象集较大，另一个映射的象集较小，则在一定条件下，可以确定此二映射的差映射象集包含一集合，此集合的差映射原象非空，以此集合中的元为映射象的差映射方程的解存在。其次，我们运用此结论讨论了几个微分方程、差分方程多解的存在性。

关键词: 微分方程；差分方程；多解；存在性

分类号: AMS(2000) 34B15　　　**中图分类号**: O175.1　　　**文献标识码**: A

1　几个引理

要想确定微分方程组解的存在性是不容易的，而要想确定微分方程组多解的存在性就更难了，这方面已有的结果也就相对地少一些。本文研究了一类微分积分方程组解的存在性，并运用它讨论了几个微分方程、差分方程多解的存在性。

定义 1.1　设 X,Y 是拓扑空间，$C(X,Y)$ 是 X 到 Y 的所有连续映射的集合，$f,g\in C(X,Y)$，$I=[0,1]$。如果有连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得对任意的 $x\in X$，$H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则称 f 与 g 同伦，记作 $f\simeq g:X\mapsto Y$，或简记为 $f\simeq g$。对任意的 $w\in X$，$f(x)=w$，$g(x)=x$，若 $f\simeq g$，则称 X 为可缩拓扑空间。设 $A\subseteq X$，若将 A 视为拓扑空间时，A 为可缩拓扑空间，则称 A 为可缩集。设 h 为从 X 到 Y 中的映射，若 h 将 X 中的任一道路连通集映为 Y 中的道路连通集，称 h 为 X 到 Y 的道路连通映射。若 U,V 为二集合，记

$$U-V=\{u-v\mid u\in U,\ v\in V\},\quad U+V=\{u+v\mid u\in U,\ v\in V\}.$$

设 $n\in\mathbf{N}$。若 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$，记

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\dots\partial^{\alpha_n}}.$$

引理 1.2　设 X,Y 是拓扑空间，f 为从 X 到 Y 中的映射，$f(X)\cup\overline{Z}\subset Y$，$f(X)\cup\overline{Z}\neq Y$ 且 $Y/f(X)$ 为连通集，∂Z 为 Z 相对于 Y 的边界，$\partial Z\subset f(X)$，则 $\overline{Z}\subseteq f(X)$。

证明　若 $\mathrm{int}Z\neq\emptyset$，$z\in\mathrm{int}Z$，$z\notin f(X)$，则 $z\in Y/f(X)$。设 $u\in Y/(f(X)\cup\overline{Z})$。因 $Y/\partial Z$ 为不连通集，z 与 u 分别属于 $Y/\partial Z$ 的两个不同的连通分支内，从而 z 与 u 分别属于 $Y/f(X)$ 的两个不同的连通分支内。此与 $Y/f(X)$ 为连通集矛盾，故 $\mathrm{int}Z\subseteq f(X)$。再由 $\partial Z\subset f(X)$ 知 $\overline{Z}=\mathrm{int}Z\cup\partial Z\subset f(X)$。

收稿日期: 2007-07-11.　**作者简介**: 吴树宏 (1963年10月生)，男，博士，副教授. 研究方向：微分方程.

引理1.3 设X为可缩拓扑空间，Y为拓扑空间，$V \subseteq Y, S, T$为X到Y的映射，$S-T$为X到Y的道路连通映射，$TX \cup \{0\} \subseteq V$，对满足$U \subseteq SX-V \subseteq Y$的任意可缩集$U$，$Y/U$为非空连通集，则$\overline{SX/(\partial SX-V)} \subseteq (S-T)X$。

证明 因X为可缩拓扑空间，$S-T$为X到Y的道路连通映射，故$(S-T)X$为Y中的可缩集。因$TX \subseteq V$，故$(S-T)X \subseteq SX-V$，此时$Y/(S-T)X$必为Y中的非空连通集。注意$0 \in V$，必有可缩集Ω，满足

$$\partial\Omega \subseteq (S-T)X, \quad SX/(\partial SX-V) \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq SX-V.$$

此时，$(S-T)X \cup \overline{\Omega} \subseteq SX-V \subseteq Y$, $(S-T)X \cup \overline{\Omega} \neq Y$。由引理1.2知

$$\overline{SX/(\partial SX-V)} \subseteq \overline{\Omega} \subseteq (S-T)X.$$

引理1.4 设X为可缩拓扑空间，Y为拓扑空间，$U, V, W \subseteq Y, S, T$为$X$到$Y$的映射，$S-T$为$X$到$Y$的道路连通映射，$SX \supseteq U, TX \cup \{0\} \subseteq V, U \cap \partial SX = \emptyset$，$V+W \subseteq U$，若对满足$P \subseteq SX-V \subseteq Y$的任意可缩集$P$，$Y/P$为非空连通集，则$\overline{W} \subseteq (S-T)X$。

证明 因$0 \in V, V+W \subseteq U$，故$W \subseteq U \subseteq SX$。设$x \in \partial SX-V$，则$(V+\{x\}) \cap \partial SX \neq \emptyset$。若$x \in W$，则$V+\{x\} \subseteq V+W \subseteq U$。从而$\emptyset \neq (V+\{x\}) \cap \partial SX \subseteq U \bigcap \partial SX = \emptyset$，矛盾，故$x \notin W$，即$W \subseteq SX/(\partial SX-V)$。再由引理1.3知

$$\overline{W} \subseteq \overline{SX/(\partial SX-V)} \subseteq (S-T)X.$$

引理1.5 若Ω_1为拓扑空间，Ω_2为凸拓扑空间，F为Ω_1到Ω_2的所有(正,非负)道路连通映射所成之集，则F为可缩集。

证明 设$g \in F$，对任意$f \in F$, $t \in [0,1]$，令$G_1(f)=g$, $G_2(f)=f$; $H(f,t)=tf+(1-t)g$。因Ω_2为凸拓扑空间，H为$F \times [0,1]$到F上的连续映射，$H(f,0)=g$, $H(f,1)=f$，故$G_1 \simeq G_2$，即F为可缩集。

定理1.6 设Ω_1为$\mathbf{R}^n$中的可缩集，Ω_2为$\mathbf{R}^l$中的凸集，Ω_3, Ω_4分别为$\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^k$中的集合，Ω为Ω_1中的可测集，由Ω_1到Ω_2, Ω_4的(正、非负)连续(可测)映射组成的集合分别记为G_1, G_2; $a \in G_2$, A, $B \subseteq G_2$, $F_1(x,y,z_\alpha(|\alpha| \leq n))$, $F_2(x,y,z_\alpha(|\alpha| \leq n))$为

$$\Omega_1 \times \Omega \times \prod_{|\alpha| \leq n} \Omega_2$$

到Ω_3中的关于y可测，关于x, $z_\alpha(|\alpha| \leq n)$连续的映射，$H_1(x,y_\alpha(|\alpha| \leq n),z)$、$H_2(x,y_\alpha(|\alpha| \leq n),z)$为

$$\Omega_1 \times \prod_{|\alpha| \leq n} \Omega_2 \times \Omega_3$$

到Ω_4中的映射，$H_1(x,y_\alpha(|\alpha| \leq n),z)-H_2(x,y_\alpha(|\alpha| \leq n),z)$为

$$\Omega_1 \times \prod_{|\alpha| \leq n} \Omega_2 \times \Omega_3$$

到Ω_4中的连续映射，对任意的$x \in \Omega_1$, $\varphi \in G_1$,

$$S(x,\varphi)=H_1\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \leq n),\, \int_\Omega F_1(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \leq n))\mathrm{d}t\Big],$$

$$T(x,\varphi)=H_2\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \leq n),\, \int_\Omega F_2(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \leq n))\mathrm{d}t\Big].$$

若

$$T[\Omega_1 \times G_1] \cup \{0\} \subseteq B, \quad S[\Omega_1 \times G_1] \supseteq A \supsetneq \{a\} + B, \quad A \cap \partial S[\Omega_1 \times G_1] = \emptyset,$$

对满足 $P \subseteq S(\Omega_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集。则微分积分方程组

$$H_1\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \le n),\, \int_\Omega F_1(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \le n))\mathrm{d}t\Big]$$
$$= a(t) + H_2\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \le n),\, \int_\Omega F_2(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \le n))\mathrm{d}t\Big]$$

有(正、非负)连续(可测)解 $\varphi \in G_1$。

证明 由 Ω_1 为可缩集，Ω_2 为凸集及引理1.5知 $\Omega_1 \times G_1$ 为可缩集。在引理1.4中令 $V = B$, $W = \{a\}$, $U = A$。由引理1.4立得 $a \in (S - T)(\Omega_1 \times G_1)$。故

$$H_1\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \le n),\, \int_\Omega F_1(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \le n))\mathrm{d}t\Big]$$
$$= a(t) + H_2\Big[x,\, D^\alpha\varphi(x)(|\alpha| \le n),\, \int_\Omega F_2(x,\, t,\, D^\alpha\varphi(t)(|\alpha| \le n))\mathrm{d}t\Big]$$

有(正、非负)连续(可测)解 $\varphi \in G_1$。

2 一类非线性椭圆方程在环域上的正对径解的多解性

考虑非线性椭圆边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(X) + f(|X|, u(X)) = 0, & R_1 < |X| < R_2, \\ \alpha_1 u(X) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial n} u(X) = 0, & |X| = R_1, \\ \gamma_1 u(X) + \delta_1 \frac{\partial}{\partial n} u(X) = 0, & |X| = R_2 \end{cases} \tag{1}$$

的正对径解的多解存在性，此处 $f : [R_1, R_2] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 连续，并设 $R_1 > 0$, $X \in \mathbf{R}^p$, $p \ge 2$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ge 0$; $\rho_1 = \alpha_1\gamma_1 + \gamma_1\beta_1 + \delta_1\alpha_1 > 0$,

$$j(s) = \begin{cases} R_2\mathrm{e}^s, & s \in [\ln R_1 - \ln R_2, 0], \quad p = 2, \\ R_2[1 - (p-2)R_2^{p-2}s]^{\frac{1}{2-p}}, & s \in [\frac{1}{p-2}(R_2^{2-p} - R_1^{2-p}), 0], \quad p > 2, \end{cases}$$

$$h(t) = \lambda^2 j^{2(p-1)}(\lambda(1-t)), \quad t \in [0, 1],$$

$$g(t, l) = f(j(\lambda(1-t)), l), \quad (t, l) \in [0, 1] \times [0, +\infty),$$

$$\lambda = \begin{cases} \ln R_1 - \ln R_2, & p = 2, \\ \frac{1}{p-2}(R_2^{2-p} - R_1^{2-p}), & p > 2, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad \beta_2 = -\frac{\beta_1}{\lambda R_1^{p-1}}, \quad \gamma_2 = \gamma_1, \quad \delta_2 = -\frac{\delta_1}{\lambda R_2^{p-1}}, \quad \rho_2 = \alpha_2\gamma_2 + \gamma_2\beta_2 + \delta_2\alpha_2 > 0,$$

$$G(x, t) = \frac{1}{\rho_2}\begin{cases} (\beta_2 + \alpha_2 x)(\gamma_2 + \delta_2 - \gamma_2 t), & 0 \le x \le t \le 1, \\ (\beta_2 + \alpha_2 t)(\gamma_2 + \delta_2 - \gamma_2 x), & 0 \le t \le x \le 1, \end{cases}$$

由 [1] 知 $\widetilde{u}$ 为方程 (1) 的正对径解当且仅当 $\widetilde{u}[j(\lambda(1-t))]$ $(t\in[0,1])$ 为积分方程

$$w(x)=\int_0^1 G(x,t)h(t)g(t,w(t))\mathrm{d}t$$

的正解。

定理 2.1 设 $l>b>0$，E 为 $[0,1]$ 中的非零可测集，

$$\phi(b,l)=\max_{r\in[R_1,R_2],s\in[b,l]} f(r,s),\qquad \psi(b,l)=\min_{t\in E,s\in[b,l]} f(j(\lambda(1-t)),s),$$

$$A=\Big[\max_{0\le x\le 1}\int_0^1 G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\Big]^{-1},\qquad B=\Big[\min_{0\le x\le 1}\int_E G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\Big]^{-1}.$$

若 $\phi(b,l)<lA$, $\psi(b,l)>bB$，则方程 (1) 存在一个正对径解 u^* 满足

$$b\le \max_{R_1\le|X|\le R_2} u^*(X)\le l.$$

证明 在定理 1.6 中，令

$$\Omega=\Omega_1=[0,1],\quad \Omega_2=[b,l],\quad \Omega_3=\Omega_4=\mathbf{R},\quad F_1(x,t,u)=0,$$

$$F_2(x,t,u)=G(x,t)h(t)g(t,u),\quad H_1(x,u,z)=u-\frac{b+l}{2},\quad H_2(x,u,z)=z-\frac{b+l}{2},$$

$$G_1=C\big([0,1],[b,l]\big),\quad G_2=C\big([0,1]\big),\quad A=B=C\Big([0,1],\Big(-\frac{l-b}{2},\frac{l-b}{2}\Big)\Big),\quad a=0.$$

易于验证，当 $t\in[0,1]$ 时，$R_1\le j(\lambda(1-t))\le R_2$。对任意的 $w\in G_1$，因

$$\int_0^1 G(x,t)h(t)g(t,w(t))\mathrm{d}t\le\int_0^1 G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\phi(b,l)<l,$$

$$\int_0^1 G(x,t)h(t)g(t,w(t))\mathrm{d}t\ge\int_E G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\psi(b,l)>b,$$

故

$$\Big|\int_0^1 G(x,t)h(t)g(t,w(t))\mathrm{d}t-\frac{b+l}{2}\Big|<\frac{l-b}{2}.$$

对 $w\in G_2$，设

$$\|w\|=\max_{0\le t\le 1}|w(t)|,$$

在此范数赋予的拓扑意义下，按定理 1.6 的符号，有

$$T(\Omega_1\times G_1)\cup\{0\}\subseteq B,\quad S(\Omega_1\times G_1)\supseteq A=B+\{a\},\quad A\cap\partial S(\Omega_1\times G_1)=\emptyset.$$

显然，对满足 $P\subseteq S(\Omega_1\times G_1)-B\subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集。由定理 1.6 知积分方程

$$w(x)-\frac{b+l}{2}=\int_0^1 G(x,t)h(t)g(t,w(t))\mathrm{d}t-\frac{b+l}{2}$$

有解 w^* 满足 $b\le w^*(t)\le l$ $(0\le t\le 1)$，故方程 (1) 亦有解 u^* 满足

$$b\le u^*(X)\le l,\quad R_1\le|X|\le R_2.$$

注 定理 2.1 与 [1] 中的结论互不包含，按此法对文 [2-4] 中的方程亦有相应的结论。如果 l, b, E 适当取，可以有多解的结论。

3 一类离散 m 点边值问题的多重正解

记 $T \in \{1,2,\cdots\}$，$N=\{0,1,2,\cdots,T\}$，$N_1=\{1,2,\cdots,T\}$，$N^+=\{0,1,2,\cdots,T+2\}$。考虑离散多点边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(k)+a(k)f(u(k))=0, & k\in N, \\ \Delta u(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i \Delta u(l_i), & u(T+2)=\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i u(l_i), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $0<l_1<l_2<\cdots<l_{m-2}\le T$，而且

(H_1) $a_i, b_i\in[0,+\infty)$，$0<\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i<1$，$\sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i<1$；

(H_2) $f\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$；

(H_3) $a\in C(N^+,\mathbf{R}^+)$ 且 $a(k)\not\equiv 0$，$k\in N^+$。其中 $C(N^+,\mathbf{R}^+)$ 为函数 $w: N^+\to\mathbf{R}$ 构成的空间，范数为

$$\|w\|=\max_{k\in N^+}|w(k)|.$$

取 $X=C(N^+,\mathbf{R})$，显然 X 是 Banach 空间。定义

$$P=\Big\{u\in X: u(k)\ge 0,\ \min_{k\in N^+} u(k)\ge \Gamma\|u\|\Big\},$$

其中

$$\Gamma=\Big[\sum_{i=1}^{m-2} a_i(T+2-l_i)\Big]^{-1}\Big[T+2-\sum_{i=1}^{m-2} a_i l_i\Big],$$

则 P 是 X 中的一锥。令

$$A=\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2} b_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{m-2} b_i\sum_{j=0}^{l_i-1} a(j)f(u(j)),$$

$$B=\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{T}(T+1-j)a(j)f(u(j))$$

$$-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\sum_{j=0}^{l_i-2}(l_i-1-j)a(j)f(u(j))+\Big(T+1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i(l_i-1)\Big)A\Big],$$

则

$$u(0)=A+B,\quad u(1)=B,\quad u(k+2)=-\sum_{j=0}^{k}(k+1-j)a(j)f(u(j))-(k+1)A+B.$$

作算子 $\Phi: X\longrightarrow X$ 为

$$\Phi u(k)=\begin{cases} A+B, & k=0, \\ B, & k=1, \\ -\sum\limits_{j=0}^{k-2}(k-1-j)a(j)f(u(j))-(k-1)A+B, & k=2,\cdots,T+2. \end{cases} \tag{3}$$

由[5]，差分方程(2)存在正解当且仅当Φ在P中存在不动点且有

$$\min_{k\in N^+}\Phi u(k)=\Phi u(T+2)\geq\Gamma\Phi u(0)=\Gamma\|\Phi u\|.$$

由上式知，若u为Φ的不动点，必有$u\in P$。这样一来，下面就不必考虑P了。设当$j\geq 0$时$H(j)=1$，当$j<0$时$H(j)=0$，$G\in C[N^+\times N,\mathbf{R}^+]$，当$k=0$，$0\leq j\leq T$时，

$$\begin{aligned}G(k,j)\ =&\ \Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}b_ia(j)H(l_i-1-j)\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{T}(T+1-j)a(j)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1-j)a(j)H(l_1-2-j)\Big]\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\Big[T+1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1)\Big]\sum_{i=1}^{m-2}b_ia(j)H(l_i-1-j);\end{aligned}$$

当$k=1$，$0\leq j\leq T$时，

$$\begin{aligned}G(k,j)\ =&\ \Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{T}(T+1-j)a(j)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1-j)a(j)H(l_1-2-j)\Big]\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\Big[T+1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1)\Big]\sum_{i=1}^{m-2}b_ia(j)H(l_i-1-j);\end{aligned}$$

当$k=2,\cdots,T+2$，$0\leq j\leq T$时，

$$\begin{aligned}G(k,j)\ =&\ -(k-1-j)a(j)H(k-2-j)-(k-1)\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}b_ia(j)H(l_i-1-j)\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{T}(T+1-j)a(j)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1-j)a(j)H(l_1-2-j)\Big]\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\Big[T+1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1)\Big]\sum_{i=1}^{m-2}b_ia(j)H(l_i-1-j).\end{aligned}$$

这样一来，(3)可写成

$$\Phi u(k)=\sum_{j=0}^{T}G(k,j)f(u(j)).$$

定理3.1 设$(H_1)-(H_3)$成立且存在$a_{i+1}>b_i>a_i>0$ $(i\in\mathbf{N})$，对$a_i<u_i<b_i$有$\Gamma^{-1}\alpha_2a_i<f(u_i)<\alpha_1b_i$，其中

$$\begin{aligned}\alpha_1=\Big\{&\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\sum_{j=0}^{l_i-1}a(j)+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{T}(T+1-j)a(j)\\&+\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\Big)^{-1}\Big[T+1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(l_i-1)\Big]\sum_{i=1}^{m-2}b_i\sum_{j=0}^{l_i-1}a(j)\Big]\Big\}^{-1},\end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \Big(T + 2 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i l_i\Big)^{-1}\Big(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\Big)\Big(1 - \sum_{i=1}^{m-2} b_i\Big)\Big[\sum_{i=1}^{m-2} b_i \sum_{j=0}^{l_i-1} a(j)\Big]^{-1},$$

则方程 (2) 存在无穷个正解 u_i^* 满足 $a_i \le u_i^* \le b_i$。

证明 在定理1.6中，令 $\Omega = N$，关于 Ω 的积分测度为 $\sum\limits_{k\in\Omega} \delta_k$, δ_k 为 Dirac 函数，

$$\Omega_1 = N^+, \quad \Omega_2 = [a_i, b_i], \quad \Omega_3 = \Omega_4 = \mathbf{R}, \quad F_1(x,t,u) = 0,$$

$$F_2(x,t,u) = G(x,t)f(u), \quad H_1(x,u,z) = u - \frac{a_i+b_i}{2}, \quad H_2(x,u,z) = z - \frac{a_i+b_i}{2},$$

$$G_1 = C(N^+,\Omega_2), \quad G_2 = C(N^+), \quad A = B = C\Big(N^+, \Big(-\frac{b_i-a_i}{2}, \frac{b_i-a_i}{2}\Big)\Big), \quad a = 0.$$

对任意的 $u \in G_1$，当 $k \in N^+$ 时，有

$$a_i = \Gamma\alpha_2^{-1}\Gamma^{-1}\alpha_2 a_i < \Gamma\Phi u(0) \le \Phi u(k) \le \Phi u(0) < \alpha_1^{-1}\alpha_1 b_i = b_i,$$

故

$$\Big|\Phi u(k) - \frac{a_i+b_i}{2}\Big| < \frac{b_i-a_i}{2}.$$

在范数 $\|\cdot\|$ 赋予的拓扑意义下，按定理1.6的符号，有

$$T(\Omega_1\times G_1)\cup\{0\} \subseteq B, \quad S(\Omega_1\times G_1) = A = B + \{a\}, \quad A \cap \partial S(\Omega_1\times G_1) = \emptyset.$$

显然，对满足 $P \subseteq S(\Omega_1\times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集。由定理1.6知差分映射

$$\Phi u(k) - \frac{a_i+b_i}{2} = u(k) - \frac{a_i+b_i}{2}$$

有不动点 u_1^* 满足 $a_i \le u_i^* \le b_i$。故差分方程 (2) 亦有解 u_1^* 满足 $a_i \le u_i^* \le b_i$。

4 一类非线性二阶微分方程无穷边值问题的多重正无界解

考虑如下二阶微分方程的无穷边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(t,x(t)) = 0, & t \in \mathbf{R}^+ = [0,+\infty); \\ x(0) = x_0, & x'(+\infty) = y_\infty \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性，其中 $f \in \mathbf{C}[\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$, $x_0 \ge 0$, $y_\infty \ge 0$, $x'(\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t)$。这里无界解的含义是指解 $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在且 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$，并不是指解在有限时刻爆破，它刻画了解 (系统的轨线) 按确定的渐进速度随时间 t 的无限增加而无限远离原点，即变化率呈稳定状态，这种解无论是在理论上还是在实际应用中都有重要意义。

令

$$FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}] = \Big\{x \in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}] : \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \frac{|x(t)|}{1+t} < +\infty\Big\},$$

容易看出，对 $x \in FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}]$，若赋以范数

$$\|x\|_F =: \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \frac{|x(t)|}{1+t},$$

则其成为一个Banach空间。下面在$FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}]$中研究(4)的正解的存在性。若$x\in C^2[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}]$且满足(4)，则称$x$为(4)的解。若还满足当$t>0$时$x(t)>0$，则称$x$为(4)的正解。特别地，当$y_\infty\neq 0$时，其正解一定为正无界解。为方便起见，先给出下列条件：

(H_1) $f\in C[\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$，存在常数$\mu>\lambda>1$, $l_2\geq 1\geq l_1>0$满足：对任意$t,x\in(0,+\infty)$有

$$c^\mu f(t,x)\leq f(t,cx)\leq c^\lambda f(t,x),\quad \forall\, c\in[0,l_1],$$

$$c^\lambda f(t,x)\leq f(t,cx)\leq c^\mu f(t,x),\quad \forall\, c\in[l_2,+\infty);$$

(H_2) $\int_0^{+\infty}(1+t)^\mu f(t,1)\mathrm{d}t<+\infty$。

由[6]引理2.1知，若(H_1), (H_2)满足，则$x\in FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]\cap C^2[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$为(4)的正解当且仅当$x\in FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$为下列积分方程的正解，

$$x(t)=x_0+ty_\infty+\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\quad t\in\mathbf{R}^+,$$

其中$G(t,s)=\min\{t,s\}$。定义

$$P=:\left\{x\in FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]:x(t)\geq\left\{\begin{array}{lll}\frac{tx(r)}{1+r}, & t\in[0,1], & r\in\mathbf{R}^+,\\ \frac{x(r)}{1+r}, & t\in[1,+\infty), & r\in\mathbf{R}^+.\end{array}\right.\right\}$$

显然P为一个非空凸闭集$(1\in P)$，进一步可以验证P为$FC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}]$中的一个锥且对$x\in P$有

$$\frac{x(t)}{1+t}\geq\left\{\begin{array}{ll}\frac{t\|x\|_F}{1+t}, & t\in[0,1],\\ \frac{\|x\|_F}{1+t}, & t\in[1,+\infty).\end{array}\right.\tag{5}$$

在P中定义算子A:

$$(Ax)(t)=:x_0+ty_\infty+\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\quad x\in P,\ \ t\in\mathbf{R}^+.\tag{6}$$

定理4.1 设(H_1), (H_2)成立且当$t\in\mathbf{R}^+$时，$f(t,1)\not\equiv 0$，则当x_0, y_∞充分小且不全为零时，(4)至少存在两个属于P的无界正解。

证明 因为$f(t,1)\not\equiv 0$，存在$0<\alpha<\beta<+\infty$使$\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]}f(t,1)>0$。由(5)可知存在$\varepsilon_0>0$，对$x\in P$有

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]}\frac{x(t)}{1+t}\geq\varepsilon_0\|x\|_F>0,\quad\forall\, x\in P.\tag{7}$$

取c_1为常数使当$t\in[\alpha,\beta]$时$c_1\varepsilon_0\geq l_2$, $\frac{1+t}{c_1}\leq l_1$成立，此时对$x\in P$, $\|x\|_F>1$, $t\in[\alpha,\beta]$有$\frac{c_1x(t)}{1+t}\geq l_2$成立，利用$(H_1)$可知

$$f(t,x(t))\geq c_1^{\lambda-\mu}\left|\frac{x(t)}{1+t}\right|^\lambda(1+t)^\mu f(t,1),\quad t\in[\alpha,\beta],\quad \|x\|_F>1,$$

再由 (6), (7) 可知，当 $t \in [\alpha, \beta]$, $x \in P$, $\|x\|_F > 1$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{(Ax)(t)}{1+t} &= \frac{x_0 + ty_\infty}{1+t} + \int_0^\infty \frac{G(t,s)f(s,x(s))}{1+t}\mathrm{d}s \\ &> \frac{\alpha}{1+\beta}\int_\alpha^\beta c_1^{\lambda-\mu}\Big|\frac{x(s)}{1+s}\Big|^\lambda (1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s \\ &\geq \frac{\alpha\varepsilon_0^\lambda c_1^{\lambda-\mu}}{1+\beta}\int_\alpha^\beta (1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s \cdot \|x\|_F^\lambda\end{aligned}$$

选取

$$R =: \Big[\frac{\alpha\varepsilon_0^\lambda c_1^{\lambda-\mu}}{1+\beta}\int_\alpha^\beta (1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

则当

$$\min_{t\in(0,+\infty)}\frac{x(t)}{1+t} \geq R$$

时，$\frac{(Ax)(t)}{1+t} > R$。

取常数 c_2 满足 $0 < c_2 < l_1 \leq 1$, $\frac{1}{c_2} > l_2$，由条件 (H_1) 知当 $x \in P$, $\|x\|_F < l_1 \leq 1$, $t \in (0, +\infty)$ 时有

$$f(t, x(t)) = f\Big(t, \frac{c_2 x(t)}{1+t}\cdot\frac{1+t}{c_2}\Big) \leq c_2^{\lambda-\mu}\|x\|_F^\lambda (1+t)^\mu f(t,1).$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{(Ax)(t)}{1+t} &\leq \max\{x_0, y_\infty\} + \int_0^{+\infty} f(s,x(s))\mathrm{d}s \\ &\leq \max\{x_0, y_\infty\} + c_2^{\lambda-\mu}\int_0^{+\infty}(1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s\cdot\|x\|_F^\lambda\end{aligned}$$

取

$$0 < \gamma < \min\Big\{\frac{l_1}{2}, R, \Big[c_2^{\lambda-\mu}\int_0^{+\infty}(1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{1-\lambda}}\Big\} < 1.$$

当 x_0, y_∞ 充分小时，即当

$$0 < \max\{x_0, y_\infty\} \leq \gamma - \gamma^\lambda c_2^{\lambda-\mu}\int_0^{+\infty}(1+s)^\mu f(s,1)\mathrm{d}s, \quad 0 < \frac{x(t)}{1+t} < \gamma, \quad t \in (0, +\infty)$$

时有 $\frac{(Ax)(t)}{1+t} < \gamma$。

在定理 1.6 中，令

$$\Omega = \Omega_1 = (0, +\infty), \quad \Omega_2 = [0, \gamma], \quad \Omega_3 = \Omega_4 = \mathbf{R}, \quad F_1(x,t,u) = 0,$$

$$F_2(x,t,u) = G(x,t)f(t,u), \quad H_1(x,u,z) = \frac{u}{1+x} - \frac{\gamma}{2}, \quad H_2(x,u,z) = \frac{x_0 + y_\infty x + z}{1+x} - \frac{\gamma}{2},$$

$$G_1 = C\big((0,+\infty), [0,\gamma]\big), \quad G_2 = C\big((0,+\infty)\big), \quad A = B = C\Big((0,+\infty), \Big(-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}\Big)\Big), \quad a = 0.$$

对任意的 $w \in G_1$，对 $w \in G_2$，在范数 $\|\cdot\|$ 赋予的拓扑意义下，按定理 1.6 的符号，有

$$T(\Omega_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B, \quad S(\Omega_1 \times G_1) \supseteq A = B + \{a\}, \quad A \cap \partial S(\Omega_1 \times G_1) = \emptyset.$$

显然，对满足 $P \subseteq S(\Omega_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集。由上面的讨论及定理 1.6 知积分方程

$$\frac{x(t)}{1+t} - \frac{\gamma}{2} = \frac{x_0 + ty_\infty + \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s}{1+t} - \frac{\gamma}{2}, \quad t \in \mathbf{R}^+$$

有解 x_1^* 满足 $0 < \frac{x_1^*(t)}{1+t} < \gamma$，故方程 (4) 亦有解 x_1^* 满足 $0 < \frac{x_1^*(t)}{1+t} < \gamma$。

在定理 1.6 中，令

$$\Omega = \Omega_1 = (0, +\infty), \quad \Omega_2 = [R, +\infty), \quad \Omega_3 = \Omega_4 = \mathbf{R},$$

$$F_1(x,t,u) = 0, \quad F_2(x,t,u) = G(x,t)f(t,u), \quad H_1(x,u,z) = \frac{u}{1+x} - 2R,$$

$$H_2(x,u,z) = \frac{x_0 + y_\infty x + z}{1+x} - 2R, \quad G_1 = C\big((0,+\infty),[R,+\infty)\big),$$

$$G_2 = C\big((0,+\infty)\big), \quad A = B = C\big((0,+\infty),(-R,+\infty)\big), \quad a = 0.$$

对任意的 $w \in G_1$，对 $w \in G_2$，在范数 $\|\cdot\|$ 赋予的拓扑意义下，按定理 1.6 的符号，有

$$T(\Omega_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B, \quad S(\Omega_1 \times G_1) \supseteq A = B + \{a\}, \quad A \cap \partial S(\Omega_1 \times G_1) = \emptyset.$$

显然，对满足 $P \subseteq S(\Omega_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集。由上面的讨论及定理 1.6 知积分方程

$$\frac{x(t)}{1+t} - 2R = \frac{x_0 + ty_\infty + \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s}{1+t} - 2R, \quad t \in \mathbf{R}^+$$

有解 x_2^* 满足 $\frac{x_2^*(t)}{1+t} > R$，故方程 (4) 亦有解 x_2^* 满足 $\frac{x_2^*(t)}{1+t} > R$。

综上所述，方程 (4) 至少有解 x_1^*, x_2^* 满足

$$\frac{x_2^*(t)}{1+t} > R > \gamma > \frac{x_1^*(t)}{1+t} > 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

5 小结

上面我们利用第一节的方法讨论了偏微分方程、差分方程的多重解及二阶微分方程的多重无界解的问题，其方法可以总结为：先利用 Green 函数给出解的积分表达式，再利用定理 1.6 确定解的存在性。只要构造出合适的集合，可证明多解的存在性。若 Green 函数为正，容易得出正解的存在性。若方程本身奇异，在适当条件下，可以证明连续解的存在性，对某些情形，甚至可以证明奇异解的存在性。仿照上面方法，对 [7-11] 也可得到相应的结论。

参考文献：

[1] 姚庆六. 一类非线性椭圆方程在环域上的正对径解的存在性与多解性[J]. 数学年刊，2001, 22A(5): 633-638

[2] 姚庆六. 方程 $\Delta u + g(|X|)f(u) = 0$ 的环上 Dirichlet 边值问题的正对径解的存在性[J]. 数学物理学报，2000, 20(3): 414-418

[3] 姚庆六，马勤生. 某些半线性椭圆方程在环域上的正对径解的存在性[J]. 应用数学与力学，2002, 23(12): 1296-1300

[4] Yao Q L, Wang J R. Existence and multiplicity of positive radial solutions for elliptic boundary value systems[J]. 数学进展，2002, 32(2): 201-207
[5] 任景莉，任保献. 一类离散 m 点边值问题正解的存在性与多重性[J]. 系统科学与数学，2005, 25(1): 78-86
[6] 宁伟，王云诚. 一类非线性二阶微分方程无穷边值问题的多重正无界解[J]. 应用数学学报，2006, 20(1): 53-60
[7] 马如云，吴红萍. 一类四阶两点边值问题多个正解的存在性[J]. 数学物理学报，2002, 22(2): 244-249
[8] 王俊禹，高文杰，张中新. Sturm-Liouville 边值问题解的非存在性、存在性和多重性结果[J]. 数学学报，2005, 48(4): 739-746
[9] 姚庆六. 一类弹性梁方程的正解存在性与多解性[J]. 山东大学学报 (理学版)，2004, 39(5): 64-72
[10] 翁佩萱，郭志浩. p-Laplace 型非线性泛函差分方程正解的存在性[J]. 数学学报，2006, 49(1): 187-194
[11] 宁伟，王道林. 无穷区间的二阶微分方程边值问题的多重正无界解[J]. 工程数学学报，2005, 22(3): 456-462

The Existence of Multiple Solutions to Differential Equation and Difference Equation

WU Shu-hong

(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070)

Abstract: A mapping property of difference mapping is studied in this paper at first. The main idea is whether there exists original of an element under a mapping is equivalent to whether the mapping image set contains the element and is equivalent to whether there exist the solution for the mapping equation whose mapping image is the element. If there are two mappings, one's image set is larger than the other's image set. Under the proper condition we can ascertain that the image set of the difference mapping of these two mappings contains a set, original of the set under the difference mapping is not empty, there exist solutions for the difference mapping equation such that the element of the set is mapping image. Finally, we used the obtained results to discuss the existence of multiple solutions of differential equations and a difference equation.

Keywords: differential equation; difference equation; multiple solutions; existence